El modelo básico Neo-Keynesiano

(Capítulo 3 de “Monetary policy, inflation and business cycle”, de J. Galí, Ed. Princeton University Press)

Supuestos básicos:

i) Competencia imperfecta en el mercado de bienes: suponemos que cada empresa produce un bien diferenciado para el cual la empresa establece el precio.

ii) Algunas restricciones son impuestas sobre el mecanismo de ajuste de precios, suponiendo que sólo una fracción de las empresas puede re-establecer sus precios en cada periodo [También podría usarse un supuesto de ajuste cuadrático de precios à la Rotemberg (1982)].

El modelo

1. Hogares

Suponemos un hogar que vive infinitos periodos y maximiza:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U\left(C_t, N_t\right)$$

$$\text{donde } C_t \equiv \left[\int_0^1 \left(C_t(i)\right)^{1-\frac{1}{\varepsilon}} di \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

Siendo $C_t(i)$ la cantidad del bien *i* consumido por el hogar en el periodo *t*. Suponemos un continuo de bienes diferenciados en el intervalo [0,1].

La restricción presupuestaria es:

$$\int_0^{\infty} P_t(i)C_t(i)di + \underbrace{Q_t}_{\substack{\text{precio}\\ \text{de los}\\ \text{bonos}}} B_t \leq B_{t-1} + W_t N_t + \underbrace{T_t}_{\substack{\text{Transferencias}\\ \text{(puede incluir}\\ \text{dividendos)}}} \quad , \quad t = 0,1,2,...$$

El Lagrangiano del problema es:

$$\mathcal{L} = E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, N_t) + \beta^t \lambda_t \left[B_{t-1} + W_t N_t + T_t - \int_0^{\infty} P_t(i)C_t(i)di - Q_t B_t \right] \right\}$$

Las Condiciones de Primer Orden son:

$$C_t(i): \quad U_{C_t}\frac{\partial C_t}{\partial C_t(i)} = \lambda_t P_t(i)$$

Como $\dfrac{\partial C_t}{\partial C_t(i)} = \dfrac{C_t\left(C_t(i)\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\int_0^1 \left(C_t(i)\right)^{1-\frac{1}{\varepsilon}} di}$ se tiene que:

$$U_{C_t}\frac{C_t\left(C_t(i)\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\int_0^1 \left(C_t(i)\right)^{1-\frac{1}{\varepsilon}} di} = \lambda_t P_t(i) \qquad \text{(a)}$$

Si ahora derivamos respecto de $C_t(j)$, tendremos:

$$U_{C_t}\frac{C_t\left(C_t(j)\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\int_0^1 \left(C_t(i)\right)^{1-\frac{1}{\varepsilon}} di} = \lambda_t P_t(j) \qquad \text{(a')}$$

Dividiendo (a) entre (a’):

$$\left[\frac{C_t(i)}{C_t(j)}\right]^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{P_t(i)}{P_t(j)} \Rightarrow C_t(i) = C_t(j)\left[\frac{P_t(i)}{P_t(j)}\right]^{-\varepsilon}$$

Dado que $C_t \equiv \left[\int_0^1 \left(C_t(i) \right)^{1-\frac{1}{\varepsilon}} di \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$, se tiene que:

$$C_t = \left[\int_0^1 \left(C_t(j) \right)^{1-\frac{1}{\varepsilon}} \left[\frac{P_t(i)}{P_t(j)} \right]^{1-\varepsilon} di \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

$$= \left[\left(C_t(j) \right)^{1-\frac{1}{\varepsilon}} \left(P_t(j) \right)^{\varepsilon-1} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \left[\int_0^1 \left[P_t(i) \right]^{1-\varepsilon} di \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

$$= \underbrace{\left(C_t(j) \right) \left(P_t(j) \right)^{\varepsilon}}_{\left(C_t(i) \right) \left(P_t(i) \right)^{\varepsilon}} \left[\int_0^1 \left[P_t(i) \right]^{1-\varepsilon} di \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad C_t(i) = \left[\frac{P_t(i)}{P_t} \right]^{-\varepsilon} C_t \qquad (1)$$

donde $P_t = \left[\int_0^1 \left[P_t(i) \right]^{1-\varepsilon} di \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$

Por tanto,

$$\int_0^1 P_t(i)C_t(i)di = \int_0^1 P_t(i)\left[P_t(i)\right]^{-\varepsilon} P_t^{-\varepsilon}C_t di$$

$$= P_t^{-\varepsilon}C_t \underbrace{\int_0^1 \left[P_t(i)\right]^{1-\varepsilon} di}_{P_t^{1-\varepsilon}} = P_t C_t$$

Así pues, la restricción presupuestaria puede expresarse como:

$$P_t C_t + Q_t B_t \leq B_{t-1} + W_t N_t + T_t.$$

El resto de las CPO son:

$$\left.\begin{array}{ll} C_t: & U_{C_t} = \lambda_t P_t \\ N_t: & U_{N_t} = -\lambda_t W_t \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\underbrace{-\frac{U_{N_t}}{U_{C_t}}}_{RMS_{C,N}} = \frac{W_t}{P_t}}$$

$$B_t: \quad \beta E_t(\lambda_{t+1}) = \lambda_t Q_t \underbrace{\rightarrow}_{\substack{\text{usando la} \\ \text{CPO de } C_t}} \boxed{Q_t = \beta E_t\left(\frac{U_{C_{t+1}}}{U_{C_t}}\frac{P_t}{P_{t+1}}\right)}$$

Bajo el supuesto de que la función de utilidad es $U(C_t, N_t) = \frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}, \sigma, \varphi > 0$ tenemos que:

$$\frac{N_t^{\varphi}}{C_t^{-\sigma}} = \frac{W_t}{P_t} \qquad \text{(b)}$$

$$Q_t = \beta E_t \left(\frac{C_{t+1}^{-\sigma}}{C_t^{-\sigma}} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right) \qquad \text{(c)}$$

Si hacemos una aproximación log-lineal de (b) y (c):

Tomando logaritmos en (b):

$$\boxed{\varphi n_t - \sigma c_t = w_t - p_t} \qquad (2)$$

o, lo que es lo mismo:

$$\varphi \hat{n}_t - \sigma \hat{c}_t = \hat{w}_t - \hat{p}_t \qquad (2')$$

donde $n_t \equiv \ln N_t$, $c_t \equiv \ln C_t$, $w_t \equiv \ln W_t$, $p_t \equiv \ln P_t$

$$\hat{n}_t \equiv n_t - n, \hat{c}_t \equiv c_t - c, \hat{w}_t \equiv w_t - w, \hat{p}_t \equiv p_t - p$$

siendo las variables sin subíndice temporal , los niveles de estado estacionario.

De (c):

$$Q_t = \beta E_t \left(\frac{C_{t+1}^{-\sigma}}{C_t^{-\sigma}} \frac{1}{1+\pi_{t+1}} \right) \quad \text{donde} \quad \pi_{t+1} \equiv \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} \quad \rightarrow$$

$$e^{-\ln Q_t} \beta E_t \left[e^{-\sigma(\ln C_{t+1} - \ln C_t)} e^{-\ln(1+\pi_{t+1})} \right] - 1 = 0.$$

En el estado estacionario se tiene que: $\frac{1}{Q} \beta \frac{1}{1+\pi} = 1 \Rightarrow$

$$\underbrace{-\ln Q}_{i} + \underbrace{\ln \beta}_{-r=-\rho} - \underbrace{\ln(1+\pi)}_{\simeq \pi} = 0 \Rightarrow i = r + \pi.$$

Sean $\hat{q}_t \equiv \ln(Q_t / Q); \hat{\pi}_t \equiv \ln((1+\pi_t)/(1+\pi)); \hat{c}_t \equiv \ln(C_t / C);$ $q_t \equiv \ln Q_t; \pi_t \equiv \ln(1+\pi_t); c_t \equiv \ln C_t;$ entonces la condición de Euler (c) se puede escribir como:

$$e^{-q_t} \beta E_t \left[e^{-\sigma(c_{t+1} - c_t)} e^{-\pi_{t+1}} \right] - 1 = 0.$$

La aproximación lineal de esta ecuación es

$$-\frac{1}{Q}\beta\frac{1}{1+\pi}\hat{q}_t-\sigma\frac{1}{Q}\beta\frac{1}{1+\pi}E_t\hat{c}_{t+1}+\sigma\frac{1}{Q}\beta\frac{1}{1+\pi}\hat{c}_t-\frac{1}{Q}\beta\frac{1}{1+\pi}E_t\hat{\pi}_{t+1}\simeq 0\rightarrow$$

$$-\hat{q}_t-\sigma E_t\hat{c}_{t+1}+\sigma\hat{c}_t-E_t\hat{\pi}_{t+1}\simeq 0\rightarrow$$

$$\underbrace{-q_t}_{i_t}+\underbrace{q}_{-\rho-\pi}-\sigma E_t c_{t+1}+\sigma c_t-E_t\pi_{t+1}+\pi\simeq 0\rightarrow$$

$$i_t+-\rho-\sigma E_t c_{t+1}+\sigma c_t-E_t\pi_{t+1}\simeq 0\rightarrow$$

$$\boxed{c_t=E_t(c_{t+1})-\frac{1}{\sigma}\left[i_t-E_t(\pi_{t+1})-\rho\right]} \qquad (3)$$

Por último añadimos ad-hoc una ecuación log-lineal de la demanda de dinero:

$$\boxed{m_t - p_t = y_t - \eta\, i_t} \qquad (4)$$

Esta expresión podría ser microfundamentada como sigue:

Si la función de utilidad fuera: $U(C_t, N_t, M_t / P_t) = \dfrac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \dfrac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi} + \dfrac{\left(M_t / P_t\right)^{1-\upsilon}}{1-\upsilon}$

y la restricción presupuestaria es: $P_t C_t + Q_t B_t + M_t \leq B_{t-1} + M_{t-1} + W_t N_t + T_t.$

La CPO para los saldos reales será:

$$-\left(\frac{M_t}{P_t}\right)^{-\upsilon} \frac{1}{P_t} + \lambda_t = \beta E_t \lambda_{t+1} \Rightarrow -\left(\frac{M_t}{P_t}\right)^{-\upsilon} \frac{1}{P_t} + U_{C_t} = U_{C_t} Q_t \Rightarrow$$

$$\left(\frac{M_t}{P_t}\right)^{-\upsilon} = C_t^{-\sigma}(1+Q_t) \Rightarrow -\upsilon(\ln M_t - \ln P_t) = -\sigma \ln C_t + \ln(1-Q_t) \Rightarrow$$

$$m_t - p_t = \frac{\sigma}{\upsilon} c_t - \frac{1}{\upsilon} \ln(1-Q_t) \Rightarrow m_t - p_t = \frac{\sigma}{\upsilon} c_t - \frac{1}{\upsilon} \ln(1-e^{-i_t});$$

Si $\ln(1-e^{-i_t}) \simeq const. + \dfrac{1}{e^i - 1} i_t,$ y suponemos que $const. \approx 0$, entonces

$$m_t - p_t = \frac{\sigma}{\upsilon} c_t - \frac{1}{\upsilon} \frac{1}{e^i - 1} i_t \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{suponemos que} \\ \text{en eq. } y_t = c_t, \\ \sigma = \upsilon; \eta = \frac{1}{\upsilon}\frac{1}{e^i - 1}}} \text{ obtenemos (4).}$$

2. Empresas

Suponemos un continuo de empresas indiciadas por $i \in [0,1]$. Cada empresa produce un bien diferenciado, pero todas utilizan una tecnología idéntica:

$$\boxed{Y_t(i) = A_t [N_t(i)]^{1-\alpha}} \qquad (5)$$

Todas las empresas se enfrentan a una demanda isolástica como la dada por (1), y toman el nivel de precios agregado P_t y el índice de consumo agregado C_t como dado.

Siguiendo el formalismo propuesto por Calvo (1983), cada empresa puede re-establecer su precio sólo con probabilidad (1-θ) en cualquier periodo, independientemente del tiempo transcurrido desde el último ajuste. Así, en cada periodo, una medida (1-θ) de productores re-establecerán sus precio, mientras una fracción (θ) mantendrán sus precios sin variarlos. Como resultado, la duración media de un precio está dado por $1/(1-\theta)$. En este contexto, (θ) se convierte en un índice natural de la rigidez de precios.

Dinámica del precio agregado

Está dada por la ecuación:

$$\Pi_t^{1-\varepsilon} = \theta + (1-\theta)\left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}}\right)^{1-\varepsilon} \qquad (6)$$

donde $\Pi_t \equiv P_t / P_{t-1}$ es la inflación bruta entre t-1 y t , y P_t^* es el precio establecido en el periodo t por las empresas que re-optimizan su precio en cada periodo.

Demostración: Sea $S(t) \subset [0,1]$ el conjunto de empresas que no re-optimizan su precio en el periodo t. Usando la definición del nivel de precios agregado y el hecho de que todas las empresas que re-establecen precios elegirán un mismo precio P_t^*

$$P_t = \left[\int_{S(t)} \left[P_{t-1}(i) \right]^{1-\varepsilon} di + (1-\theta)\left(P_t^* \right)^{1-\varepsilon} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$$

$$= \left[\theta \left(P_{t-1} \right)^{1-\varepsilon} + (1-\theta)\left(P_t^* \right)^{1-\varepsilon} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}.$$

Dividiendo por P_{t-1},

$$\left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right)^{1-\varepsilon} \equiv \Pi_t^{1-\varepsilon} = \theta + (1-\theta)\left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}} \right)^{1-\varepsilon} \qquad (\Omega 1)$$

Nótese que en un estado estacionario con inflación cero: $P_t^* = P_t = P_{t-1} \; \forall t$.

La log-linealización de (Ω1) alrededor de Π=1 y $\frac{P_t^*}{P_{t-1}} = 1$ es:

$$(\Omega 1) \Rightarrow 0 = -e^{(1-\varepsilon)\ln \Pi_t} + \theta + (1-\theta)e^{(1-\varepsilon)(\ln P_t^* - \ln P_{t-1})} \rightarrow$$

$$0 = -e^{(1-\varepsilon)\pi_t} + \theta + (1-\theta)e^{(1-\varepsilon)(p_t^* - p_{t-1})} \rightarrow$$

$$0 = -(1-\varepsilon)\hat{\pi}_t + (1-\theta)(1-\varepsilon)(\hat{p}_t^* - \hat{p}_{t-1}) \rightarrow$$

$$\hat{\pi}_t = (1-\theta)(p_t^* - p_{t-1}) \qquad (\Omega 2)$$

Nótese que todas las empresas elegirán el mismo precio pues se enfrentan a un mismo problema. La aproximación log-lineal de (6) es (Ω2):

$$\boxed{\pi_t = (1-\theta)(p_t^* - p_{t-1})} \qquad (7)$$

Cómo se re-establece el precio óptimo

Una empresa que re-optimiza en el periodo *t* elegirá el precio P_t^* que maximiza el valor de mercado de los beneficios generados mientras ese precio permanece efectivo. Formalmente, la empresa resuelve este problema:

$$\underset{\{P_t^*\}}{Max} \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left[Q_{t,t+k} \left(P_t^* Y_{t+k|t} - \Psi_{t+k}(Y_{t+k|t}) \right) \right]$$

sujeto a la secuencia de restricciones de demanda:

$$\boxed{Y_{t+k|t} = \left(\frac{P_t^*}{P_{t+k}} \right)^{-\varepsilon} C_{t+k}} \qquad (8)$$

donde $Q_{t,t+k} \equiv \beta^k \left(\frac{C_{t+k}}{C_t} \right)^{-\sigma} \left(\frac{P_t}{P_{t+k}} \right)$ es el factor de descuento estocástico para los pagos nominales, $\Psi_t(.)$ es la función de costes, e $Y_{t+k|t}$ denota el output en el periodo $t+k$ para una empresa que reestableció su precio por última vez en el periodo t.

La condición de primer orden asociada a este problema toma la forma:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left[Q_{t,t+k} Y_{t+k|t} \left(P_t^* - \mathcal{M} \Psi_{t+k|t} \right) \right] = 0} \qquad (9)$$

Demostración: Teniendo en cuenta que $\dfrac{\partial Y_{t+k|t}}{\partial P_t^*} = -\varepsilon \dfrac{Y_{t+k|t}}{P_t^*}$:

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left[Q_{t,t+k} \left(Y_{t+k|t} + P_t^* \left(-\varepsilon \frac{Y_{t+k|t}}{P_t^*} \right) - \Psi_{t+k|t} \left(-\varepsilon \frac{Y_{t+k|t}}{P_t^*} \right) \right) \right] \rightarrow$$

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left[Q_{t,t+k} Y_{t+k|t} \left((1-\varepsilon) + \Psi_{t+k|t} \left(\varepsilon \frac{1}{P_t^*} \right) \right) \right] \rightarrow$$

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left[Q_{t,t+k} Y_{t+k|t} \left(\frac{P_t^*}{1-\varepsilon} \right) \left(P_t^* - \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \Psi_{t+k|t} \right) \right] \rightarrow$$

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left[Q_{t,t+k} Y_{t+k|t} \left(P_t^* - \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \Psi_{t+k|t} \right) \right], \text{ donde } \Psi_{t+k|t} \equiv \Psi'_{t+k}(Y_{t+k|t})$$

Nótese que en el caso límite de no rigideces ($\theta = 0$), la condición previa colapsa a la estructura de precio óptimo bajo precios flexibles: $P_t^* = \mathcal{M}\Psi_{t|t}$, lo cual nos permite interpretar $\mathcal{M}$ como el "markup" deseado en ausencia de restricciones sobre la frecuencia de ajuste de precios. Por tanto, $\mathcal{M}$ es el referido como el markup deseado o sin fricciones.

Ahora vamos a linealizar la condición (9) alrededor del estado estacionario de inflación cero. Primero, dividimos (9) por P_{t-1} y definiendo $\Pi_{t,t+k} \equiv P_{t+k} / P_t$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left[Q_{t,t+k} Y_{t+k|t} \left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}} - \mathcal{M}\, MC_{t+k|t} \Pi_{t-1|t+k} \right) \right] = 0} \qquad (10)$$

donde $MC_{t+k|t} \equiv \Psi_{t+k|} / P_{t+k}$ es el coste marginal real en el periodo $t+k$ para una empresa cuyo precio fue establecido por última vez en el periodo t.

En el estado estacionario de inflación cero, $P_t^* / P_{t-1} = 1$ y $\Pi_{t-1|t+k} = 1$. Además, que los precios sean constantes implica que $P_t^* = P_{t+k}$ en ese estado estacionario, del cual sigue que $Y_{t+k|t} = Y$ y $MC_{t+k|t} = MC$, porque todas las empresas estarían produciendo la misma cantidad de output. Además, $Q_{t,t+k} = \beta^k$ debe mantenerse en ese estado estacionario. Por tanto, $MC = 1/\mathcal{M}$. Una expansión de Taylor de primer orden de (10) alrededor de un estado estacionario con inflación cero es:

$$\boxed{p_t^* - p_{t-1} = (1-\beta\theta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left[\hat{mc}_{t+k|t} + (p_{t+k} - p_{t-1})\right]} \tag{11}$$

Demostración:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k E_t\left[e^{\ln Q_{t,t+k}}e^{\ln Y_{t+k|t}}\left(e^{\ln P_t^*-\ln P_{t-1}}-\mathcal{M}\,e^{\ln MC_{t+k|t}}e^{\ln P_{t+k}-\ln P_{t-1}}\right)\right]=0\rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k E_t\left[\beta^k\underbrace{(1-\mathcal{M}\,MC)}_{0}\left(\hat{q}_{t,t+k}-\hat{y}_{t+k|t}\right)+\beta^k Y\left((p_t^*-p_{t-1})-\underbrace{\mathcal{M}\quad MC}_{1}(\underbrace{\overset{\wedge}{mc}_{t+k|t}}_{\ln(MC_{t+k|t}/MC)}+p_{t+k}-p_{t-1}\right)\right]\simeq 0\rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k E_t\left[\beta^k\left(p_t^*-\overset{\wedge}{mc}_{t+k|t}-p_{t+k}\right)\right]\simeq 0\rightarrow$$

$$p_t^*\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left[\beta^k\left(\overset{\wedge}{mc}_{t+k|t}+p_{t+k}\right)\right]\rightarrow$$

$$p_t^*=(1-\theta\beta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left[\beta^k\left(\overset{\wedge}{mc}_{t+k|t}+p_{t+k}\right)\right]\qquad(11')\rightarrow$$

$$p_t^*=\mu+(1-\theta\beta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left[\beta^k\left(mc_{t+k|t}+p_{t+k}\right)\right],\ \text{donde}\ ,\ mc=-\mu,\ \ \mu\equiv\ln\mathcal{M}.$$

3. Equilibrio

El vaciado de mercado en el mercado de bienes requiere que:

$$Y_t(i) = C_t(i), \quad \forall i \in [0,1], \forall t.$$

Definiendo el output agregado como $Y_t \equiv \left[\int_0^1 \left[Y_t(i) \right]^{1-\frac{1}{\varepsilon}} di \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$ se sigue que:

$$Y_t = C_t, \quad \forall t.$$

Así, de (3) se tiene que:

$$\boxed{y_t = E_t(y_{t+1}) - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t(\pi_{t+1}) - \rho\right)} \qquad (12)$$

El vaciado de mercado en el mercado de trabajo requiere que:

$$N_t = \int_0^1 N_t(i)\, di\,.$$

Usando (5):

$$N_t(i) = \left[\frac{Y_t(i)}{A_t}\right]^{1/(1-\alpha)}. \text{ Por tanto, } N_t = \int_0^1 \left[\frac{Y_t(i)}{A_t}\right]^{1/(1-\alpha)} di \underbrace{=}_{\substack{\text{usando (1)} \\ \text{y } Y_t(i)=C_t(i), \\ Y_t=C_t}} \int_0^1 \left[\frac{P_t(i)}{P_t}\right]^{-\varepsilon/(1-\alpha)} \left[\frac{Y_t}{A_t}\right]^{1/(1-\alpha)} di =$$

$$= \left[\frac{Y_t}{A_t}\right]^{1/(1-\alpha)} \int_0^1 \left[\frac{P_t(i)}{P_t}\right]^{-\varepsilon/(1-\alpha)} di.$$

Tomando logaritmos:

$$\underbrace{\ln N_t}_{n_t} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\underbrace{\ln Y_t}_{y_t} - \underbrace{\ln A_t}_{a_t}\right) + \underbrace{\ln\left[\int_0^1 \left[\frac{P_t(i)}{P_t}\right]^{-\varepsilon/(1-\alpha)} di\right]}_{\substack{d_t/(1-\alpha)\text{: es una medida de la dispersión} \\ \text{del precio (y, por tanto, del output) entre empresas}}} \rightarrow$$

$$(1-\alpha)n_t = (y_t - a_t) + d_t$$

La variable d_t, en el entorno del estado estacionario con inflación cero, es nula en una aproximación de primer orden. Por tanto, uno puede escribir la siguiente relación entre empleo, output agregado y tecnología:

$$\boxed{y_t = a_t + (1-\alpha)n_t} \tag{13}$$

Demostración de que $d_t \approx 0$ en una aproximación de primer orden alrededor del estado estacionario:

De la definición del índice de precios:

$$1=\int_0^1\left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{1-\varepsilon} di = \int_0^1 e^{(1-\varepsilon)[p_t(i)-p_t]}di$$

$$\simeq 1+(1-\varepsilon)\int_0^1[p_t(i)-p_t]di + \frac{(1-\varepsilon)^2}{2}\int_0^1[p_t(i)-p_t]^2 di \Rightarrow$$

$$p_t \simeq \int_0^1 p_t(i)di + \frac{(1-\varepsilon)}{2}\int_0^1[p_t(i)-p_t]^2 di.$$

Además, $\int_0^1\left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\varepsilon/(1-\alpha)} di = \int_0^1 e^{-\frac{\varepsilon}{1-\alpha}[p_t(i)-p_t]}di$

$$\simeq 1-\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\int_0^1[p_t(i)-p_t]di + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\right)^2\int_0^1[p_t(i)-p_t]^2 di$$

$$\underbrace{\simeq}_{\text{usando la anterior aproximación}} 1+\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\frac{1-\varepsilon}{2}\int_0^1[p_t(i)-p_t]^2 di + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\right)^2\int_0^1[p_t(i)-p_t]^2 di$$

$$\simeq 1+\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\frac{1}{2}\int_0^1[p_t(i)-p_t]^2 di \underbrace{\left[1-\varepsilon+\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\right]}_{\frac{1-\alpha+\alpha\varepsilon}{1-\alpha}\equiv 1/\Theta}^{-1}$$

$$\simeq 1+\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\frac{1}{2}\frac{1}{\Theta}\operatorname{var}_i\left(p_t(i)\right) > 1$$

La última igualdad viene de: $\int_0^1[p_t(i)-p_t]^2 di \underbrace{\simeq}_{\text{sólo aprox. de primer orden}} \int_0^1\left[p_t(i)-\int_0^1 p_t(i)di\right]^2 di \equiv \operatorname{var}_i\left(p_t(i)\right).$

Finalmente, usando la definición de d_t :

$$d_t \equiv (1-\alpha)\ln\left[\int_0^1\left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\varepsilon/(1-\alpha)} di\right]$$

$$\simeq (1-\alpha)\ln\left[1+\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\frac{1}{2}\frac{1}{\Theta}\operatorname{var}_i\left(p_t(i)\right)\right]$$

$$\simeq \left[\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\Theta}\operatorname{var}_i\left(p_t(i)\right)\right]$$

A continuación derivamos la expresión para el coste marginal de una empresa individual en términos del coste marginal real medio de la economía:

$$
\begin{aligned}
mc_t &= (w_t - p_t) - mpn_t \\
&\underbrace{=}_{\substack{PMg_n=(1-\alpha)A_t N_t^{-\alpha} \\ \ln PMg_n=\ln(1-\alpha)+a_t-\alpha n_t}} (w_t - p_t) - (a_t - \alpha n_t) - \ln(1-\alpha) \\
&= (w_t - p_t) - \frac{1}{1-\alpha}(a_t - \alpha y_t) - \ln(1-\alpha), \;\; \forall t.
\end{aligned}
$$

Usando el hecho de que:

$$mc_{t+k|t} = (w_{t+k} - p_{t+k}) - \frac{1}{1-\alpha}(a_{t+k} - \alpha y_{t+k|t}) - \ln(1-\alpha),$$

entonces,

$$\boxed{mc_{t+k|t} \underbrace{=}_{\substack{\text{de (8): } y_{t+k|t}=-\varepsilon(p_t^*-p_{t+k})+c_{t+k} \\ =-\varepsilon(p_t^*-p_{t+k})+y_{t+k}}} mc_{t+k} - \frac{\alpha\varepsilon}{1-\alpha}(p_t^* - p_{t+k})} \qquad (14)$$

Nótese que bajo el supuesto de rendimientos constantes a escala ($\alpha = 0$), $mc_{t+k|t} = mc_{t+k}$, es decir, el coste marginal es independiente del nivel de producción y, por tanto, es común entre empresas.

Sustituyendo (14) en (11):

$$p_t^* - p_{t-1} = (1-\beta\theta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left[\hat{mc}_{t+k} - \frac{\alpha\varepsilon}{1-\alpha}p_t^* + \frac{\alpha\varepsilon}{1-\alpha}p_{t+k} - p_{t-1}\right] \rightarrow$$

$$\frac{1}{\Theta}(p_t^* - p_{t-1}) = (1-\beta\theta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left[\hat{mc}_{t+k} + \frac{1}{\Theta}(p_{t+k} - p_{t-1})\right] \rightarrow$$

$$p_t^* - p_{t-1} = (1-\beta\theta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left[\Theta\hat{mc}_{t+k} + (p_{t+k} - p_{t-1})\right]$$

$$\underbrace{=}_{\text{ver nota a pie}} (1-\beta\theta)\Theta\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left[\hat{mc}_{t+k}\right] + \sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left[\pi_{t+k}\right]$$

Esta última expresión puede escribirse de forma más compacta como:

$$\boxed{p_t^* - p_{t-1} = (\beta\theta)E_t(p_{t+1}^* - p_t) + (1-\beta\theta)\Theta\hat{mc}_t + \pi_t} \qquad (15)$$

Nota al pie:

$\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k p_{t+k} = p_t - p_{t-1} + p_{t-1} + \beta\theta(p_{t+1} - p_t + p_t) + (\beta\theta)^2(p_{t+2} - p_{t+1} + p_{t+1}) + ... = \sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k \pi_{t+k} + p_{t-1} + \sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k p_{t+k} \Rightarrow$

$(1-\beta\theta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k p_{t+k} - p_{t-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k \pi_{t+k}$

Combinando (7) y (15) tenemos:

$$\boxed{\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \lambda \hat{mc}_t,} \qquad (16)$$

donde $\lambda = \dfrac{(1-\beta\theta)(1-\theta)\Theta}{\theta}$, y la solución a (16) es

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \hat{mc}_{t+k}$$

Ahora derivamos una relación entre el coste marginal real de la economía y una medida de la actividad económica agregada. Nótese que, independientemente de cómo se establezcan los precios, el coste marginal real medio puede expresarse como:

$$mc_t = (w_t - p_t) - mpn_t$$

$$\underbrace{=}_{(2)} \sigma y_t + \varphi n_t - (y_t - n_t) - \ln(1-\alpha)$$

$$\underbrace{=}_{(13)} \sigma y_t + \frac{\varphi}{1-\alpha}(y_t - a_t) - \left[y_t - \frac{1}{1-\alpha}(y_t - a_t) \right] - \ln(1-\alpha) \rightarrow$$

$$\boxed{mc_t = \left[\sigma + \frac{\varphi+\alpha}{1-\alpha} \right] y_t - \frac{1+\varphi}{1-\alpha} a_t - \ln(1-\alpha)} \qquad (17)$$

Además, bajo precios flexibles, el coste marginal real es constante y está dado por $mc = -\mu$. Definiendo el nivel natural de output, y_t^n, como el nivel de output de equilibrio bajo precios flexibles:

$$\boxed{mc = \left[\sigma + \frac{\varphi+\alpha}{1-\alpha}\right] y_t^n - \frac{1+\varphi}{1-\alpha} a_t - \ln(1-\alpha)} \qquad (18)$$

por tanto,

$$\boxed{y_t^n = \psi_{ya}^n a_t + \vartheta_y^n} \qquad (19)$$

donde

$$\vartheta_y^n \equiv -\frac{(1-\alpha)\big(\mu - \ln(1-\alpha)\big)}{\sigma(1-\alpha)+\varphi+\alpha} < 0$$

$$\psi_{ya}^n \equiv \frac{1+\varphi}{\sigma(1-\alpha)+\varphi+\alpha}.$$

Restando (17) de (18):

$$\boxed{\hat{mc}_t = \left(\sigma + \frac{\varphi+\alpha}{1-\alpha}\right)(\underbrace{y_t - y_t^n}_{\tilde{y}_t\text{: output gap}})} \qquad (20)$$

Combinando (20) con (16):

$$\boxed{\pi_t = \beta E_t(\pi_{t+1}) + \kappa \tilde{y}_t} \qquad (21)$$

donde $\kappa \equiv \lambda\left(\sigma + \frac{\varphi+\alpha}{1-\alpha}\right)$

que es la Curva de Phillips neo-keynesiana.

Ahora reescribimos (12) en función del output-gap:

$$y_t - y_t^n = E_t(y_{t+1} - y_{t+1}^n) - y_t^n + E_t y_{t+1}^n - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\pi_{t+1} - \rho\right) \rightarrow$$

$$\tilde{y}_t = E_t(\tilde{y}_{t+1}) - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\pi_{t+1} - \rho + \sigma E_t \nabla y_{t+1}^n\right) \rightarrow$$

$$\tilde{y}_t \underbrace{=}_{(19)} E_t(\tilde{y}_{t+1}) - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\pi_{t+1} - \rho + \sigma\psi_{ya}^n E_t \nabla a_{t+1}\right) \rightarrow$$

$$\boxed{\tilde{y}_t = E_t(\tilde{y}_{t+1}) - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\pi_{t+1} - r_t^n\right)} \qquad (22)$$

donde $\boxed{r_t^n = \rho - \sigma\psi_{ya}^n E_t \nabla a_{t+1}}$ (23)

Nótese que (22) es una curva IS dinámica; bajo el supuesto de que los efectos de las rigideces nominales desaparecen asintóticamente, $\lim_{T\to\infty} E_t \tilde{y}_{t+T} = 0$.

Bajo ese supuesto ($\lim_{T\to\infty} E_t \tilde{y}_{t+T} = 0$), la solución a (22) será:

$$\boxed{\tilde{y}_t = -\frac{1}{\sigma}\sum_{k=0}^{\infty}(r_{t+k} - r^*_{t+k})} \tag{24}$$

donde $r_t \equiv i_t - E_t \pi_{t+1}$

Las ecuaciones (21) y (22), junto con un proceso de equilibrio para la tasa natural r_t^n (la cual dependerá en general de todas las fuerzas exógenas reales del modelo), constituye el bloque de “non-policy” del modelo básico neo-keynesiano. Ese bloque tiene una estructura recursiva simple: La curva de Phillips Neo-Keynesiana determina la inflación dada una senda para el output-gap, mientras que la IS dinámica determina el output gap dad un senda para la tasa natural del tipo de interés (exógena) y el tipo actual de interés.

Para cerrar el modelo, hay que agregar a esas dos ecuaciones una o más ecuaciones que determinen cómo evoluciona el tipo de interés nominal i_t a lo largo del tiempo, con una descripción de cómo se lleva a cabo la política monetaria. Así, en contraste con el modelo clásico analizado en el capítulo 2, cuando los precios son rígidos la senda de equilibrio de las variables reales no puede ser determinado independientemente de la política monetaria. En otras palabras: **la política monetaria no es neutral.**

4. Equilibrio bajo una regla de tipo de interés

Sea la siguiente regla de tipo de interés que utiliza la Autoridad Monetaria para poner en marcha su política monetaria:

$$\boxed{i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \tilde{y}_t + \upsilon_t} \tag{25}$$

donde $\phi_\pi \geq 0, \phi_y \geq 0, \upsilon_t$: es un componente exógeno, probablemente estocástico, y la elección de ρ como término constante hace que esta regla sea consistente con inflación nula en el estado estacionario.

Combinando (21), (22) y (25):

De (22) y (25):

$$\tilde{y}_t = E_t\tilde{y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}\left(\rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \tilde{y}_t + \upsilon_t - E_t\pi_{t+1} - r_t^n\right) \rightarrow$$

$$\boxed{\left(1+\frac{\phi_y}{\sigma}\right)\tilde{y}_t = E_t\tilde{y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}\left(\phi_\pi \pi_t + \upsilon_t - E_t\pi_{t+1} - \hat{r}_t^n\right),} \qquad (22')$$

donde $\hat{r}_t^n \equiv r_t^n - \rho$.

Si ponemos en forma matricial (22') y (21):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1+\dfrac{\phi_y}{\sigma} & \dfrac{\phi_\pi}{\sigma} \\ -\kappa & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \tilde{y}_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{\sigma} \\ 0 & \beta \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} E_t\tilde{y}_{t+1} \\ E_t\pi_{t+1} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sigma} \\ 0 \end{bmatrix}}_{C} \left(\hat{r}_t^n - \upsilon_t\right)$$

$$A^{-1} = \frac{\sigma}{\sigma + \kappa\phi_\pi + \phi_y}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{\phi_\pi}{\sigma} \\ \kappa & 1+\frac{\phi_y}{\sigma} \end{bmatrix}$$

$$A_T \equiv A^{-1}B = \frac{1}{\sigma + \kappa\phi_\pi + \phi_y}\begin{bmatrix} \sigma & 1-\phi_\pi\beta \\ \kappa\sigma & \kappa+\beta(\sigma+\phi_y) \end{bmatrix}$$

$$B_T \equiv A^{-1}C = \frac{1}{\sigma + \kappa\phi_\pi + \phi_y}\begin{bmatrix} 1 \\ \kappa \end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\begin{bmatrix} \tilde{y}_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = A_T \begin{bmatrix} E_t\tilde{y}_{t+1} \\ E_t\pi_{t+1} \end{bmatrix} + B_T\left(\hat{r}_t^n - \upsilon_t\right)} \qquad (26)$$

Dado que tanto el output-gap como la inflación son variables no predeterminadas, la solución a (26) es única, si y sólo si, A_T tiene a ambos autovalores dentro del círculo unitario. Bajo el supuesto de coeficientes (ϕ_π, ϕ_y) no negativos puede demostrarse que una condición necesaria y suficiente para la unicidad es:

$$\boxed{\kappa(\phi_\pi - 1) + (1-\beta)\phi_y > 0} \tag{27}$$

De (26) y (23):

$$\boxed{\begin{bmatrix} \tilde{y}_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = A_T \begin{bmatrix} E_t \tilde{y}_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \end{bmatrix} + B_T \left(\sigma \psi_{ya}^n E_t \left(\nabla a_{t+1} \right) - \upsilon_t \right)} \tag{28}$$

donde si $a_t = \rho_a a_{t-1} + \varepsilon_{at} \Rightarrow \nabla a_t \equiv a_t - a_{t-1} = (\rho_a - 1)a_{t-1} + \varepsilon_{at} \Rightarrow$ $E_t \left(\nabla a_{t+1} \right) = (\rho_a - 1)a_t$. Además, supondremos que $\upsilon_t = \rho_\upsilon \upsilon_{t-1} + \varepsilon_{\upsilon t}$

Solución numérica a (28):

Sea $X_t \equiv \begin{bmatrix} \tilde{y}_t \\ \pi_t \end{bmatrix}, \varepsilon_t \equiv \sigma \psi_{ya}^n (\rho_a - 1) a_t - \upsilon_t$;

por tanto, (28) es $X_t = A_T E_t X_{t+1} + B_T \varepsilon_t$.

La solución recursiva a (28) será:

$$\boxed{X_t = \underbrace{\left[\lim_{j \to \infty} A_T^j E_t X_{t+j} \right]}_{\substack{=0\text{, si los autovalores de} \\ A_T \text{ están dentro del círculo} \\ \text{unitario}}} \sum_{j=0}^{\infty} A_T^j B_T E_t \varepsilon_{t+j}.} \qquad (28')$$

Como $\begin{Bmatrix} a_t = \rho_a a_{t-1} + \varepsilon_{at} \\ \upsilon_t = \rho_a \upsilon_{t-1} + \varepsilon_{\upsilon t} \end{Bmatrix} \Rightarrow E_t \varepsilon_{t+j} = \sigma \psi_{ya}^n (\rho_a - 1) \rho_a^j a_t - \rho_\upsilon^j \upsilon_t$,

la solución a (28') es:

$$\boxed{X_t = \sum_{j=0}^{\infty} A_T^j B_T \left(\sigma \psi_{ya}^n (\rho_a - 1) \rho_a^j a_t - \rho_\upsilon^j \upsilon_t \right)} \qquad (29)$$

Sean $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$ y $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ las matrices de autovectores por la izquierda y la matriz de autovalores de A_T.

Sea $m \equiv M^{-1} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$. Teniendo en cuenta que $A_T^j = M\Lambda^j m$, y denotando $B_T = \begin{bmatrix} b_{T,1} \\ b_{T,2} \end{bmatrix}$, (28) será:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^j & 0 \\ 0 & \lambda_2^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{T,1} \\ b_{T,1} \end{bmatrix} \left(\sigma\psi_{ya}^n (\rho_a - 1)\rho_a^j a_t - \rho_\upsilon^j \upsilon_t \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \left[\underbrace{M_{11}\left(m_{11}b_{T,1} + m_{12}b_{T,2}\right)}_{\alpha_{11}} \lambda_1^j + \underbrace{M_{12}\left(m_{21}b_{T,1} + m_{22}b_{T,2}\right)}_{\alpha_{12}} \lambda_2^j \right] \\ \left[\underbrace{M_{21}\left(m_{11}b_{T,1} + m_{12}b_{T,2}\right)}_{\alpha_{21}} \lambda_1^j + \underbrace{M_{22}\left(m_{21}b_{T,1} + m_{22}b_{T,2}\right)}_{\alpha_{22}} \lambda_2^j \right] \end{bmatrix} \left(\sigma\psi_{ya}^n (\rho_a - 1)\rho_a^j a_t - \rho_\upsilon^j \upsilon_t \right)$$

$$\boxed{= \begin{bmatrix} \underbrace{\left[\frac{\alpha_{11}}{1-\lambda_1\rho_a} + \frac{\alpha_{12}}{1-\lambda_2\rho_a} \right] \sigma\psi_{ya}^n (\rho_a - 1)}_{\gamma_{11}} & \underbrace{-\left[\frac{\alpha_{11}}{1-\lambda_1\rho_\upsilon} + \frac{\alpha_{12}}{1-\lambda_2\rho_\upsilon} \right]}_{\gamma_{12}} \\ \underbrace{\left[\frac{\alpha_{21}}{1-\lambda_1\rho_a} + \frac{\alpha_{22}}{1-\lambda_2\rho_a} \right] \sigma\psi_{ya}^n (\rho_a - 1)}_{\gamma_{21}} & \underbrace{-\left[\frac{\alpha_{21}}{1-\lambda_1\rho_\upsilon} + \frac{\alpha_{22}}{1-\lambda_2\rho_\upsilon} \right]}_{\gamma_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_t \\ \upsilon_t \end{bmatrix} \quad (29)}$$

De (29) obtenemos sendas temporales de $\{\tilde{y}_t, \pi_t\}$ dadas las secuencias exógenas de los shocks de oferta y monetario $\{a_t, \upsilon_t\}$. Dado $\{\pi_t\}$ y un nivel de precios inicial (p_0), podemos obtener una secuencia de precios $\{p_t\}$. Como sabemos de (7) que $p_t^* - p_{t-1} = (1/(1-\theta))\pi_t$, de esta expresión podemos obtener la secuencia $\{p_t^*\}$. De (25) obtenemos la secuencia temporal para los tipos de interés nominales ($\{i_t\}$); de (23) obtenemos $\{r_t^n\}$; de (24) sabemos que $r_t = i_t - E_t\pi_{t+1}$; como sabemos, de (29), que $E_t\pi_{t+1} = E_t(\gamma_{21}a_{t+1} + \gamma_{22}\upsilon_{t+1}) = \gamma_{21}\rho_a a_t + \gamma_{22}\rho_\upsilon \upsilon_t$, ya podemos calcular la secuencia de $\{r_t\}$. De (19) obtenemos el output natural y, por tanto, podemos obtener $\{y_t\}$ o $\{c_t\}$.

De (17) obtenemos $\{mc_t\}$. De (13) obtenemos la secuencia del empleo $\{n_t\}$. De (4) obtenemos $\{m_t\}$. De (2) obtenemos los salarios $\{w_t\}$.

Solución analítica a (28) (por el método de los coeficientes indeterminados):

Sea la siguiente propuesta de solución:

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{y}_t = \Phi_1 a_t + \Phi_2 \upsilon_t \\ \pi_t = \Psi_1 a_t + \Psi_2 \upsilon_t\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} E_t\left(\tilde{y}_{t+1}\right) = \Phi_1 \rho_a a_t + \Phi_2 \rho_\upsilon \upsilon_t \\ E_t\left(\pi_{t+1}\right) = \Psi_1 \rho_a a_t + \Psi_2 \rho_\upsilon \upsilon_t \end{array}$$

Aplicando esta propuesta de solución en (28) podemos determinar las constantes $\left\{\Phi_1, \Phi_2, \Psi_1, \Psi_2\right\}$ resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \left[1-\Omega\sigma\rho_a\right]\Phi_1 - \Omega\rho_a(1-\beta\phi_\pi)\Psi_1 = -\Omega\sigma\psi_{ya}^n(1-\rho_a) \\ -\Omega\sigma\rho_a\kappa \ \ \Phi_1 + \left[1-\Omega\rho_a\left(\kappa+\beta(\sigma+\phi_y)\right)\right]\Psi_1 = -\Omega\kappa\sigma\psi_{ya}^n(1-\rho_a) \end{array}\right\} & \text{(S2)} \\ \left.\begin{array}{l} \left[1-\Omega\sigma\rho_\upsilon\right]\Phi_2 - \Omega\rho_\upsilon(1-\beta\phi_\pi)\Psi_2 = -\Omega \\ -\Omega\sigma\rho_\upsilon\kappa\,\Phi_2 + \left[1-\Omega\rho_\upsilon\left(\kappa+\beta(\sigma+\phi_y)\right)\right]\Psi_2 = -\Omega\kappa \end{array}\right\} & \text{(S1)} \end{cases}$$

donde $\Omega = 1/(\sigma + \phi_y + \kappa\phi_\pi)$

Resolver (S1) y (S2) conduce a:

$$\Phi_1 = \frac{-\sigma\psi_{ya}^{n}(1-\rho_a)(1-\rho_a\beta)}{\sigma+\phi_y+\kappa\phi_\pi-\rho_a\left[\sigma\left(1+\beta(1-\rho_a)\right)+\kappa+\beta\phi_y\right]},$$

$$\Phi_2 = \frac{-(1-\rho_\upsilon\beta)}{\sigma+\phi_y+\kappa\phi_\pi-\rho_\upsilon\left[\sigma\left(1+\beta(1-\rho_\upsilon)\right)+\kappa+\beta\phi_y\right]},$$

$$\Psi_1 = \frac{-\sigma\psi_{ya}^{n}(1-\rho_a)\kappa}{\sigma+\phi_y+\kappa\phi_\pi-\rho_a\left[\sigma\left(1+\beta(1-\rho_a)\right)+\kappa+\beta\phi_y\right]},$$

$$\Psi_2 = \frac{-\kappa}{\sigma+\phi_y+\kappa\phi_\pi-\rho_\upsilon\left[\sigma\left(1+\beta(1-\rho_\upsilon)\right)+\kappa+\beta\phi_y\right]},$$

Dados los valores de $\{\Phi_1, \Phi_2, \Psi_1, \Psi_2\}$ y los procesos estocásticos de $\{a_t, \upsilon_t\}$, se tiene que:

$$\tilde{y}_t = \Phi_1 \sum_{j=0}^{\infty} \rho_a^j \varepsilon_{a,t-j} + \Phi_2 \sum_{j=0}^{\infty} \rho_\upsilon^j \varepsilon_{\upsilon,t-j}$$

$$\pi_t = \Psi_1 \sum_{j=0}^{\infty} \rho_a^j \varepsilon_{a,t-j} + \psi_2 \sum_{j=0}^{\infty} \rho_\upsilon^j \varepsilon_{\upsilon,t-j}$$